ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1999

MATHÉMATIQUES : ÉPREUVE B
FILIÈRE PHYSIQUE ET CHIMIE
DURÉE : 2 heures 30

Un corrigé

-I-

1. (a) Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, $\varphi(P) = (1-X^2)P''(X) - 3XP'(X)$ est la somme de deux polynômes de degrés $\leq n$, c'est donc un polynôme de degré $\leq n$. La linéarité de φ est évidente.

(b) Il suffit de déterminer les images des éléments de la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2, ..., X^n)$. Un calcul immédiat donne :

$$\varphi(X^k) = -k(k+2)X^k + k(k-1)X^{k-2}.$$

D'où la matrice

$$A = Mat_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -3 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -8 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & k(k-1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & -k(k+2) & \dots & n(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & -n(n+2) \end{pmatrix}.$$

2. (a) Les valeurs propres de φ sont celles de A, c'est à dire, puisque A est triangulaire, les $n+1$ réels qui se trouvent sur la diagonale :

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{\, -k(k+2) \mid 0 \leq k \leq n \,\}.$$

(b) A est une matrice carrée d'ordre $n+1$ qui admet $n+1$ valeurs propres réelles distinctes, elle est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$. L'endomorphisme φ est donc diagonalisable.

(c) Soit P un polynôme propre associé à la valeur propre $-k(k+2)$. Quitte à diviser P par son coefficient dominant, on peut supposer P unitaire.
Notons d le degré du polynôme P. Le coefficient de X^d du polynôme $\varphi(P)$ est $-d(d-1) - 3d = -d(d+2)$, tandis que celui de $-k(k+2)P$ est $-k(k+2)$. On a donc $d(d+2) = k(k+2)$ relation qui s'écrit encore $(d-k)(d+k+2) = 0$ d'où $d = k$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre $-k(k+2)$ qui est de dimension 1 (car les valeurs propres sont simples) est donc engendré par un polynôme unitaire de degré k.

(d) Les deux premières colonnes de la matrice A montrent que $P_0 = 1$ et $P_1 = X$. Le polynôme $P_2 = X^2 + aX + b$ est déterminé par la relation :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où l'on déduit facilement $a = 0$, $b = \dfrac{-1}{4}$ et donc $P_2 = X^2 - \dfrac{1}{4}$. De la même façon le polynôme $P_3 = X^3 + aX^2 + bX + c$ est déterminé par le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = -15 \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient $P_3 = X^3 - \dfrac{1}{2}X$.

(e) Posons $P_n = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$. Le coefficient de X^k dans le polynôme $\varphi(P_n)$ est alors

$$-k(k+1)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2}$$

et puisque

$$\varphi(P_n) = -n(n+2)P_n$$

on a la relation

$$-k(k+2)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2} = -n(n+2)a_k,$$

avec $a_n = 1, a_{n+1} = a_{n+2} = 0$. En particulier pour $k = n-1$ on obtient $a_{n-1} = 0$, puis $a_{n-3} = a_{n-1} = 0$... Donc si n est pair les coefficients a_k d'indice impair sont nuls et donc le polynôme P_n est pair, tandis que, si n est impair, les coefficients a_k d'indice pair sont nuls, P_n est donc impair.
Avec $k = n-2$ on obtient la relation $-(n-2)na_{n-2} + n(n-1) = -n(n+2)a_{n+2}$ d'où :

$$a_{n-2} = -\frac{n-1}{4}.$$

3. Soit $y = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}x^{2p}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On a alors, par dérivation terme à terme, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$y' = \sum_{p=0}^{\infty} 2pa_{2p}x^{2p-1}$$

et

$$y'' = \sum_{p=0}^{\infty} 2p(2p-1)a_{2p}x^{2p-2}.$$

On en déduit que que y est solution de l'équation différentielle (E_n) si et seulement si

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[(2p+2)(2p+1)a_{2p+2} + (n(n+2) - 2p(p+1))a_{2p}\right] x^{2p} = 0$$

et donc, par unicité du développement en série entière, si et seulement si

$$(2p+2)(2p+1)a_{2p+2} + (n(n+2) - 2p(p+1))a_{2p} = 0 \text{ pour tout } p \in \mathbf{N}.$$

Choisissons par exemple $a_0 = 1$. Ces relations déterminent a_{2p} de façon unique pour tout $p \in \mathbf{N}$ et, puisque $n(n+2) - 2p(p+2)$ n'est jamais égal à 0 car $n(n+2)$ est impair tandis que $2p(2p+1)$ est pair, on a bien $a_{2p} \neq 0$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.
Enfin, puisque $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \left|\frac{a2p+2}{a2p}x^2\right| = |x^2|$, le rayon de convergence R est égal à 1. Dans la suite nous désignons par S la fonction ainsi définie sur $]-1, 1[$. C'est une solution non nulle de (E_n) et elle est paire. Comme P_n est une fonction impaire, il est facile de voir que S et P_n sont linéairement indépendantes, elles forment donc une base de l'espace vectoriel des solutions de (E_n). Les solutions de (E_n) sont donc toutes les combinaisons linéaires de S et de P_n.

-II-

1. (a) La fonction $t \mapsto f(t)g(t)\sqrt{1-t^2}$ est continue sur le segment $[-1,1]$ et elle y est donc intégrable. La bilinéarité et la symétrie de l'application $(f,g) \mapsto (f|g)$ est évidente.

Pour tout $f \in E$, $(f|f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ est un réel positif, et puisque que la fonction $t \mapsto f^2(t)\sqrt{1-t^2}$ est continue positive, la relation $(f|f) = 0 \Leftrightarrow f^2(t)\sqrt{1-t^2} = 0$ pour tout $t \in [-1,1]$. Il en résulte que f est nulle sur $]-1,1[$, et, par continuité, que $f(-1) = f(1) = 0$. f est donc la fonction nulle. On a donc bien affaire à un produit scalaire sur E.

(b) Pour cela il suffit de calculer les intégrales

$$I_n = \int_{-1}^{1} t^n \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$$

pour n est un entier naturel.

Par parité, on a évidemment $I_{2k+1} = 0$ et $I_{2k} = 2\int_0^1 t^{2k}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$. On effectue le changement de variable $t = \sin x$. On obtient

$$I_{2k} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \cos^2 x \mathrm{d}x.$$

On peut donc écrire $I_{2k} = 2(J_{2k} - J_{2k+2})$, avec $J_{2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \mathrm{d}x$. Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned} J_{2k} &= (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-2} x \cos^2 x \mathrm{d}x \\ &= (2k-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-2} x (1-\sin^2 x)\mathrm{d}x \\ &= (2k-1)(J_{2k-2} - J_{2k}) \end{aligned}$$

d'où la relation $2kJ_{2k} = (2k-1)J_{2k-2}$ et donc

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)...3.1}{(2k)...2} J_0.$$

Comme $J_0 = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)...3.1}{(2k)...2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2}\pi.$$

On obtient finalement $I_{2k} = 2(J_{2k} - J_{2k+2}) = \frac{2}{2k+1}J_{2k+2}$ d'où :

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{(k+1)2^{2k+1}(k!)^2}\pi.$$

2. (a) À l'aide une intégration par partie, on a :

$$\int_{-}^{1} 1f''(t)g(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} 3f'(t)g(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

d'où la relation $(\varphi'(f)|g) = -\int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t$. Compte tenu des rôles symétriques que jouent f et g dans le second membre, on a bien

$$(\varphi'(f)|g) = (f|\varphi'(g)).$$

(b) Pour $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, on a

$$(\varphi'(P_k)|P_n) = -k(k+2)(P_k|P_n)$$

et

$$(\varphi'(P_n)|P_k) = -n(n+2)(P_n,|P_k).$$

Comme $-k(k+2) \neq -n(n+2)$, on a bien $(P_k|P_n) = 0$.

3. (a) P_n et XP_{n-1} sont deux polynômes unitaires de degré n. Le polynôme $P_n - XP_{n-1}$ est donc de degré au plus $n-1$.

Comme $(P_{n-1}, P_{n-2}, ..., P_0)$ est une base de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, il existe des scalaires $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, ..., \alpha_0$ tels que

$$P_n - XP_{n-1} = \alpha_{n-1}P_{n-1} + \alpha_{n-2}P_{n-2} + ... + \alpha_0 P_0.$$

Si $j \in \{0, ..., n-3\}$, on a $(P_n - XP_{n-1}|P_j) = \alpha_j(P_j|P_j)$. Mais $(P_n - XP_{n-1}|P_j) = (P_n|P_j) - (XP_{n-1}|P_j) = -(XP_{n-1}|P_j) = -(P_{n-1}|XP_j) = 0$ puisque P_{n-1} est orthogonal à tous les éléments de $\mathbf{R}_{n-2}[X]$. On a donc $\alpha_j = 0$ pour tous les indices $j < n-2$ et il reste donc $P_n - XP_{n-1} = \alpha_{n-1}P_{n-1} + \alpha_{n-2}P_{n-2}$. Donc $P_n - XP_{n-1}$ est combinaison linéaire de P_{n-1} et P_{n-2}.

(b) Nous avons établi dans la question I.2.e que le coefficient de X_{n-1} du polynôme P_n est nul, il en résulte que le coefficient de X_{n-1} dans le polynôme $P_n - XP_{n-1}$ est nul. C'est donc que son degré est $\leq n-2$ et on a donc $\lambda_{n-1} = 0$. Enfin compte tenu des coefficients de X_{n-2} dans les polynôme P_n et XP_{n-1} on obtient

$$\lambda_{n-2} = -\frac{n-1}{4} + \frac{n-2}{4} = -\frac{1}{4}$$

et on a donc

$$4P_n - 4XP_{n-1} + P_{n-2} = 0.$$

(c) On a $P_0(1) = 1$ et $P_1(1) = 1$. La relation précédente montre que la suite $(P_n(1))_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire du second ordre

$$P_n(1) = P_{n-1}(1) - \frac{1}{4}P_{n-2}(1).$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$. Elle admet la racine double $r = \frac{1}{2}$. $P_n(1)$ est donc de la forme

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n}(a + bn)$$

où a et b sont deux constantes que l'on détermine à l'aide des valeurs de $P_0(1)$ et de $P_1(1)$. On obtient ainsi $a = b = 1$ d'où $P_n(1) = \frac{n+1}{2^n}$.

4. (a) On peut écrire $P_n = X^n + Q$ où Q est un polynôme appartenant à $\mathbf{R}_{n-1}[X]$. On a donc

$$(P_n|P_n) = (P_n|X^n) + (P_n|Q) = (P_n|X^n).$$

Avec les notations de la question **II.1.(b)**, on a :

$$(P_0|P_0) = I_0 = 2, (P_1,|P_1) = I_2 = 8$$

et

$$(P_2|P_2) = (P_2|X^2) = I_4 - \frac{1}{4}I_2 = \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{32} = \frac{\pi}{32}.$$

(b) On peut écrire $P_{k+2} = X^{k+2} - \frac{k+1}{4}X^k + Q$, avec $Q \in \mathbf{R}_{k-1}[X]$, et donc

$$(P_k|P_{k+2}) = (P_k|X_{k+2}) - \frac{k+1}{4}(P_k|X^k) + (P_k|Q).$$

On a donc bien

$$(P_k|X^{k+2}) = \frac{k+1}{4}(P_k|P_k).$$

(c) On a :

$$0 = (0|X^n) = (4P_n - 4XP_{n-1} + P_{n-2}|X^n) = 4(P_n|P_n) - 4(P_{n-1}|X^{n+1}) + (P_{n-2}|X^n),$$

d'où en tenant compte des résultats précédents :

$$4(P_n|P_n) - n(P_{n-1}|P_{n-1}) + \frac{n-1}{4}(P_{n-2}|P_{n-2}) = 0.$$

Cette relation permet de vérifier par récurrence sur n la relation $(P_n|P_n) = \dfrac{\pi}{2^{2n+1}}$. En effet, elle est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ et si on la suppose vérifiée au rangs $n - 2$ et $n - 1$, la relation précédente montre qu'elle est vrai au rang n.

••••••••••••